

Занятие 21: числа Каталана

Определение. n -м числом Каталана называется количество способов добраться из левой нижней вершины клетчатого квадрата $n \times n$ до правой верхней, если разрешается двигаться только по линиям сетки вправо или вверх и запрещается подниматься выше главной диагонали. Обозначение: C_n .

- 1) Найдите числа Каталана C_0, C_1, C_2, C_3 , выполнив полный перебор всех возможных путей.
- 2) Выведите формулу для чисел Каталана, действуя по следующему плану.
 - а) Найдите количество способов добраться от левого нижнего угла квадрата $n \times n$ до правого верхнего, если разрешается подниматься выше главной диагонали.
 - б) Докажите, что количество путей, поднимающихся выше главной диагонали, равно количеству путей из левой нижней вершины прямоугольника $(n - 1) \times (n + 1)$ до его правой верхней вершины.
 - в) Решите задачу.

Замечание. Существуют десятки определений чисел Каталана. Ваша задача — установить эквивалентность новых определений сформулированному выше, установив взаимно-однозначное соответствие между путями в квадрате и вводимыми объектами.

- 3) Правильной скобочной последовательностью (ПСП) называется пустая последовательность или последовательность скобок вида (ПСП)ПСП. (Например, $()(())$ — правильная последовательность, а $(())()$ — неправильная.) Найдите количество правильных скобочных последовательностей, составленных из n пар скобок.
- 4) Найдите количество способов соединить $2n$ точек, расположенных на окружности, n отрезками, не имеющими общих точек.
- 5) Найдите количество способов разбить $(n + 2)$ -угольник на треугольники непересекающимися (во внутренних точках) диагоналями.

Домашнее задание

- 6) Докажите, что числа Каталана удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$C_0 = 1; \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0.$$

Для каждой из задач (с 1 по 5) докажите, что соответствующие комбинаторные объекты удовлетворяют этому соотношению.

- 7) Найдите количество способов вычислить выражение $a_1 * a_2 * \dots * a_n$, где a_i — некоторые числа, а $*$ обозначает операцию (например, «умножение»).
- 8) Постройте «треугольник Каталана», используя треугольник Паскаля. Для этого расположите треугольник Паскаля в виде равнобедренного с вертикальной осью симметрии. Заполняйте треугольник Паскаля, не заходя левее этой оси (т.е. складывайте только числа, лежащие на оси и правее ее). Где находятся числа Каталана? Почему?