

Занятие 22: графы

Определение. *Ориентированным графом*, или *орграфом*, называется пара (V, E) , где V — конечное множество, называемое *множеством вершин*, а E — множество упорядоченных пар вершин $v_i \rightarrow v_j$, называемое *множеством ориентированных рёбер*. *Исходящей* (соотв. *входящей*) *степенью* вершины v называется количество рёбер вида $v \rightarrow x$ (соотв. $x \rightarrow v$).

1) Докажите, что количество рёбер в ориентированном графе равно сумме исходящих степеней его вершин (а также сумме входящих степеней его вершин).

Определение. *Путь* в графе называется конечная последовательность его вершин v_1, v_2, \dots, v_n такая, что $v_i \rightarrow v_{i+1}$ для любого $i \in \overline{1, n-1}$. Число $n-1$ называется *длиной пути* v_1, v_2, \dots, v_n . Путь называется *замкнутым*, если $v_1 = v_n$.

2) Докажите, что если в ориентированном графе отсутствуют замкнутые пути ненулевой длины, то каждой его вершине v можно сопоставить целое положительное число $f(v)$ так, что

$$a \rightarrow b \Rightarrow f(a) < f(b).$$

(Подсказка: докажите, что в таком графе существует вершина нулевой входящей степени.)

3) Многие математические игры можно представить как походные перемещения по вершинам некоторого ориентированного графа, называемого *графом состояний* игры. Для анализа таких игр можно применить метод *ВП-разметки*: каждой вершине сопоставить букву В или П так, чтобы

- а) не было рёбер вида $\Pi \rightarrow \Pi$;
- б) для любой В-вершины v было ребро $v \rightarrow \Pi$.

Если играют два игрока и проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода, то у игрока, начинающего свой ход с В-вершины, существует выигрышная стратегия: «иди в П».

Докажите, что для графов состояний без замкнутых путей ненулевой длины всегда существует ВП-разметка.

4) На столе лежит n рублёвых монет и n двухрублёвых монет. За один ход разрешается брать со стола монеты на сумму не более 3 рублей. Играют два игрока, проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода.

а) Нарисуйте граф состояний игры для $n = 3$ и его ВП-разметку.

б) Докажите, что в этой игре П-позициями являются те и только те, в которых общая сумма денег на столе делится на 4.

Определение. *Неориентированным графом*, или просто *графом*, называется пара (V, E) , где V — конечное множество, называемое *множеством вершин*, а E — множество неупорядоченных пар вершин $v_i - v_j$, называемое *множеством рёбер*. *Степенью* вершины v в графе называется количество рёбер вида $v - x$, причем петли (т.е. ребра вида $v - v$) считаются два раза.

5) Докажите, что в любом графе количество вершин нечётной степени чётно. (Подсказка: каждое неориентированное ребро в графе без петель порождается парой ориентированных рёбер; петли на чётность степеней не влияют, поэтому можно без ограничения общности считать, что их нет.)

6) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

7) В стране много городов, каждый соединён авиалиниями со 100 другими, причём из любого города можно добраться до любого другого (возможно с пересадками). Одну из авиалиний закрыли. Докажите, что по-прежнему можно добраться из любого города до любого другого.

Домашнее задание

8) Докажите, что среди 6 людей всегда найдётся либо тройка попарно знакомых, либо тройка попарно незнакомых.

9) Пусть каждые два человека либо дружат, либо враждуют, либо незнакомы. Докажите, что среди 17 людей обязательно найдётся либо тройка попарно дружащих, либо тройка попарно враждующих, либо тройка попарно незнакомых.

10) Докажите, что среди 9 людей всегда найдётся либо четвёрка попарно знакомых, либо тройка попарно незнакомых.