Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Занятие 5: делимость целых чисел

Определение. Пусть a, b — целые числа. Говорят, что b *делится* на a (или a *делит* b), если для некоторого целого x верно равенство $ax = b$. В этом случае a называется *делителем* числа b. Обозначение: $a \mid b$.

1) Докажите, что если $a \neq 0$, то $a \mid b$ тогда и только тогда, когда отношение b/a — целое число.
2) Докажите, что для любых целых a, x, y выполнено
 а) $a \mid xa$; б) из $a \mid x$ и $a \mid y$ следует $a \mid (x+y)$.
3) Докажите, что для любых целых a, b, c выполнено
 а) если $a \neq 0$, то $x \mid y$ равносильно $ax \mid ay$; б) из $a \mid b$ и $b \mid c$ следует $a \mid c$.
4) Докажите или опровергните следующие утверждения:
 а) 0 делится на 0;
 б) $2 \mid (n^2 - n)$ для любого целого n;
 в) $3 \mid (n^3 - n)$ для любого целого n;
 г) $4 \mid (n^4 - n)$ для любого целого n;
 д) если $a \mid bc$, то $a \mid b$ или $a \mid c$;
 е) если $a \mid b$, то $|a| \leqslant |b|$;
 ж) если $a \mid b$ и $b \mid a$, то $|b| = |a|$.

Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Занятие 5: делимость целых чисел

Определение. Пусть a, b — целые числа. Говорят, что b *делится* на a (или a *делит* b), если для некоторого целого x верно равенство $ax = b$. В этом случае a называется *делителем* числа b. Обозначение: $a \mid b$.

1) Докажите, что если $a \neq 0$, то $a \mid b$ тогда и только тогда, когда отношение b/a — целое число.
2) Докажите, что для любых целых a, x, y выполнено
 а) $a \mid xa$; б) из $a \mid x$ и $a \mid y$ следует $a \mid (x+y)$.
3) Докажите, что для любых целых a, b, c выполнено
 а) если $a \neq 0$, то $x \mid y$ равносильно $ax \mid ay$; б) из $a \mid b$ и $b \mid c$ следует $a \mid c$.
4) Докажите или опровергните следующие утверждения:
 а) 0 делится на 0;
 б) $2 \mid (n^2 - n)$ для любого целого n;
 в) $3 \mid (n^3 - n)$ для любого целого n;
 г) $4 \mid (n^4 - n)$ для любого целого n;
 д) если $a \mid bc$, то $a \mid b$ или $a \mid c$;
 е) если $a \mid b$, то $|a| \leqslant |b|$;
 ж) если $a \mid b$ и $b \mid a$, то $|b| = |a|$.

Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Занятие 5: делимость целых чисел

Определение. Пусть a, b — целые числа. Говорят, что b *делится* на a (или a *делит* b), если для некоторого целого x верно равенство $ax = b$. В этом случае a называется *делителем* числа b. Обозначение: $a \mid b$.

1) Докажите, что если $a \neq 0$, то $a \mid b$ тогда и только тогда, когда отношение b/a — целое число.
2) Докажите, что для любых целых a, x, y выполнено
 а) $a \mid xa$; б) из $a \mid x$ и $a \mid y$ следует $a \mid (x+y)$.
3) Докажите, что для любых целых a, b, c выполнено
 а) если $a \neq 0$, то $x \mid y$ равносильно $ax \mid ay$; б) из $a \mid b$ и $b \mid c$ следует $a \mid c$.
4) Докажите или опровергните следующие утверждения:
 а) 0 делится на 0;
 б) $2 \mid (n^2 - n)$ для любого целого n;
 в) $3 \mid (n^3 - n)$ для любого целого n;
 г) $4 \mid (n^4 - n)$ для любого целого n;
 д) если $a \mid bc$, то $a \mid b$ или $a \mid c$;
 е) если $a \mid b$, то $|a| \leqslant |b|$;
 ж) если $a \mid b$ и $b \mid a$, то $|b| = |a|$.