Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Занятие 16: функция Эйлера

Малая теорема Ферма (МТФ) позволяет упрощать сравнения по простому модулю p: если a не кратно p, то можно заменить a^{p-1} на 1. Возникает вопрос: что делать, если модуль составной? Китайская теорема об остатках (КТО) позволяет заменить сравнение по модулю произведения степеней простых чисел на систему сравнений по модулям этих степеней. У КТО есть обобщения на этот случай, но мы их трогать не будем. Пойдём другим путём (который в переспективе оказывается полезнее): обобщим МТФ.

Задачи

1) *Функция Эйлера* φ сопоставляет каждому целому положительному числу n количество $\varphi(n)$ остатков по модулю n, взаимно простых с n. Вычислите $\varphi(6)$, $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(43)$. Существует ли такое n, что $\varphi(n) = 3$?

2) Пусть n — нечетное число. Докажите, что среди чисел, меньших n и взаимно простых с n, четных и нечетных поровну.

3) Известно, что $\varphi(n) = k$. Чему может быть равно $\varphi(2n)$?

4) Пусть p и q простые. Найдите: а) $\varphi(p)$; б) $\varphi(p^k)$; в) $\varphi(pq)$; г) $\varphi(p^a q^b)$, где a и b — натуральные числа.

5) Решите уравнения: а) $\varphi(7^x) = 294$; б) $\varphi(3^x 5^y) = 360$.

6) Пусть c_1, c_2, … c_k — остатки по модулю n, взаимно простые с n. Пусть также a и n взаимно просты. Докажите, что

$$a^k c_1 c_2 \dots c_k \equiv c_1 c_2 \dots c_k \pmod{n}.$$

Теорема (Эйлера)**.** *Пусть a и n взаимно просты. Тогда* $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

7) Докажите *теорему Эйлера*.

8) Докажите, что функция Эйлера удовлетворяет соотношению

$$n = \sum_{d\,|\,n} \varphi(d) = \varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_k),$$

где d_1, d_2, … d_k — всевозможные делители n.

9) Докажите, что если a и b взаимно просты, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. (Подсказка: для любого n верно $n\,|\,n$.)

10) Выведите из теоремы Эйлера малую теорему Ферма.

11) Пусть в разложение числа $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$. а) Докажите, что

$$\varphi(n) = \left(p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1}\right)\left(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}\right)\dots\left(p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1}\right).$$

б) Выведите из этой формулы следующую:

$$\varphi(n) = n\prod_i\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

12) Докажите, что если m и n взаимно просты, а x взаимно прост с каждым из них, то для $c = \text{НОК}(\varphi(m), \varphi(n))$

$$x^c \equiv 1 \pmod{mn}.$$

13) Найдите $2013^{16} \bmod 544$.

14) Докажите, что если a и b — взаимно простые натуральные числа, то $a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}$.

15) Пусть $a \geqslant 2$, $n \geqslant 1$ — целые числа. Докажите, что $n\,|\,\varphi(a^n - 1)$.

16) Простые числа p, q таковы, что $q\,|(5^p + 1)$ и $p\,|(3^{3q} - 1)$. Доказать, что среди чисел p и q есть 2, 3 или 13.

17) Докажите, что для любого натурального a число a^5 оканчивается на ту же цифру, что и a.

18) а) Найдите все целые числа a, для которых $a^{10} + 1$ оканчивается цифрой ноль. б) Докажите, что ни при каком целом a число $a^{100} + 1$ не оканчивается цифрой ноль.

19) Докажите, что если $a^3 + b^3 + c^3$ кратно 9, то хотя бы одно из целых чисел a, b, c кратно 3.

20) Докажите, что если n — нечетное натуральное число, то $2^{n!} - 1$ кратно n.

21) Существует ли такое натуральное число k, что сто последних цифр десятичной записи числа 3^k совпадают со ста последними цифрами числа 7^k?