

Занятие 18: число сочетаний и треугольник Паскаля

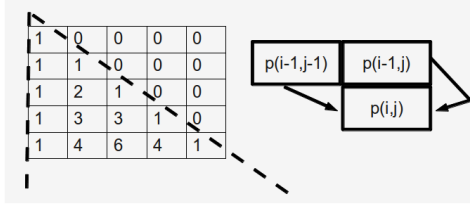
Число способов выбрать k элементов из n -элементного множества без учета порядка (число сочетаний):

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Определение. *Треугольником Паскаля* называется таблица чисел $p(i, j)$ таких, что

$$p(i, j) = p(i-1, j-1) + p(i-1, j), \quad p(i, 0) = 1, \quad p(0, j) = 0 \text{ при } j > 0$$

(или иногда часть этой таблицы не выше главной диагонали).



Задачи

- 1) Докажите (по индукции), что $p(n, k) = C_n^k$.
- 2) Докажите, что число в клетке треугольника Паскаля равно количеству способов добраться до него из клетки $(0, 0)$, если разрешается делать ходы вниз и вниз-вправо.
- 3) Найдите суммы чисел в первых строчках треугольника Паскаля и угадайте общую формулу. Докажите по индукции формулу для суммы чисел в n -й строке треугольника Паскаля.
- 4) Докажите, что в любой строке треугольника Паскаля, начиная с первой, сумма чисел, стоящих на четных местах, равна сумме чисел, стоящих на нечетных местах.

Домашнее задание

- 5) Выберите произвольную клетку на правой границе. Сложите несколько чисел по вертикали, начиная с выбранной клетки. Что получилось? Докажите полученное соотношение.
- 6) Некоторые строки треугольника Паскаля состоят только из нечётных чисел. Каковы их номера?

Занятие 18: число сочетаний и треугольник Паскаля

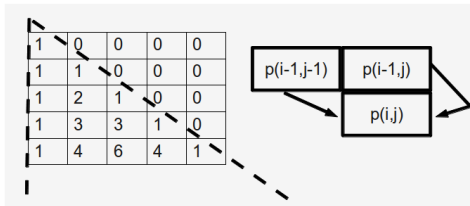
Число способов выбрать k элементов из n -элементного множества без учета порядка (число сочетаний):

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Определение. *Треугольником Паскаля* называется таблица чисел $p(i, j)$ таких, что

$$p(i, j) = p(i-1, j-1) + p(i-1, j), \quad p(i, 0) = 1, \quad p(0, j) = 0 \text{ при } j > 0$$

(или иногда часть этой таблицы не выше главной диагонали).



Задачи

- 1) Докажите (по индукции), что $p(n, k) = C_n^k$.
- 2) Докажите, что число в клетке треугольника Паскаля равно количеству способов добраться до него из клетки $(0, 0)$, если разрешается делать ходы вниз и вниз-вправо.
- 3) Найдите суммы чисел в первых строчках треугольника Паскаля и угадайте общую формулу. Докажите по индукции формулу для суммы чисел в n -й строке треугольника Паскаля.
- 4) Докажите, что в любой строке треугольника Паскаля, начиная с первой, сумма чисел, стоящих на четных местах, равна сумме чисел, стоящих на нечетных местах.

Домашнее задание

- 5) Выберите произвольную клетку на правой границе. Сложите несколько чисел по вертикали, начиная с выбранной клетки. Что получилось? Докажите полученное соотношение.
- 6) Некоторые строки треугольника Паскаля состоят только из нечётных чисел. Каковы их номера?