

Занятие 19: комбинаторика раскрытия скобок**Задачи**

- 1) Сколько слагаемых будет после раскрытия скобок в выражении
- $(a + b + c + d + e)(f + g + h)$?
 - $(1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d)(1 + e)(1 + f)(1 + g)(1 + h)$?
 - $(a + b)^{10}$?
- г) Сколько слагаемых будет после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(a+b)^n$?
- 2) а) Раскройте скобки и приведите подобные в выражениях $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, $(a + b)^4$ и выпишите результаты друг под другом. Заметьте, что коэффициенты образуют треугольник Паскаля.
- б) Раскройте скобки и приведите подобные в выражении $(a + b)^n$. Докажите, что все слагаемые имеют вид $C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$.
- 3) Выведите из предыдущей задачи формулу *Бинома Ньютона*:

$$(a + b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^k b^{n-k} + \dots + C_n^0 b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Благодаря этой формуле числа C_n^k часто называют *биномиальными коэффициентами*.

- 4) Выведите из бинома Ньютона, что а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$,
 б) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.
- 5) Докажите соотношение

$$C_{2n}^m = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2.$$

- 6) Найдите число таких последовательностей длины 16 из нулей и единиц, в которых не менее чем три единицы.

Домашнее задание

- 7) Найдите в биномиальном разложении $\left(x + \frac{2}{x^3}\right)^{20}$ слагаемое, не содержащее переменную.
- 8) Найдите коэффициент при x^4 в разложении $(1 - 3x + 2x^2)^{10}$. Подсказка: разложите многочлен $1 - 3x + 2x^2$ на множители.
- 9) Найдите сумму $\sum_{n=0}^n (-2)^k C_n^k = C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 - \dots + (-2)^n C_n^n$.
- 10) Докажите соотношение

$$C_{m+n}^p = C_m^0 C_n^p + C_m^1 C_n^{p-1} + \dots + C_m^p C_n^0.$$