

Занятие 20: сочетания с повторениями

Определение. Числом сочетаний с повторениями из n по k называется число способов выбрать k элементов из n -элементного множества без учета порядка, причем один и тот же элемент можно брать несколько раз. Обозначение: \bar{C}_n^k .

Задачи

- 1) а) Сколькими способами можно разделить лежащие в ряд 7 шаров перегородками на 3 непустых подмножества?
 б) Сколькими способами можно выложить в ряд 7 шаров и 3 перегородки (перегородки можно располагать рядом)?
 в) Сколькими способами можно выложить в ряд k шаров и $(n - 1)$ перегородку (перегородки можно располагать рядом)?
- 2) Докажите, что
 - а) число способов разложить k одинаковых шаров по n различным ящикам;
 - б) число способов расставить $n - 1$ перегородку между k лежащими в ряд одинаковыми шарами (перегородки можно ставить рядом);
 - в) количество целых неотрицательных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = k$ есть число сочетаний с повторениями из n по k . Выведите формулу для \bar{C}_n^k .
- 3) Сколько решений имеет уравнение $x + y + z + t = 11$
 - а) в натуральных числах?
 - б) в целых неотрицательных числах?
- 4) Сколькими способами можно расположить в 4 лузах 9 белых и 6 черных шаров? (часть луз может быть пустой, лузы считаются различными, одноцветные шары одинаковыми).
- 5) Докажите, что числа \bar{C}_n^k удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\bar{C}_n^0 = 1; \quad \bar{C}_0^k = 0, \quad k > 0; \quad \bar{C}_n^k = \bar{C}_n^{k-1} + \bar{C}_{n-1}^k, \quad n > 0, \quad k > 0.$$

- 6) Пусть $p(n, k)$ — число в n -й строке и k -м столбце треугольника Паскаля. Доопределим p для отрицательных значениях первого параметра. Пусть $p(n, 0) = 1$ при любом n и при всех $k > 0$ выполняется

$$p(n, k) = p(n - 1, k - 1) + p(n - 1, k).$$

Найдите явную зависимость чисел в строках с отрицательными номерами от номеров строки и столбца.

Домашнее задание

- 7) В магазине продаются конфеты 5 различных сортов. Сколькими способами можно купить 17 конфет?
- 8) На полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них пять книг так, чтобы никакие две не стояли рядом?
- 9) Сколькими способами можно разложить
 - а) 3 рублёвых и 10 пятирублёвых монет в 4 разных пакета?
 - б) 10 пятирублёвых монет в 4 одинаковых пакета?
 - в*) 1 рублёвую и 10 пятирублёвых монет в 4 одинаковых пакета?